

# Medindo a massa da Lua com um pêndulo

Por Hindenburg Melão Jr.

[31/3/2009]

Numa comunidade de Astronomia, há poucos dias um pós-doutorado pela UFRGS especialista em buracos negros declarou que seria possível observar o anel de luz que orbitasse um buraco-negro, o que obviamente não pode acontecer, já que se os fótons estão em órbita naquela região, eles não chegam às retinas dos observadores, nem aos instrumentos fotossensíveis para os detectar. Agora, nesta comunidade, foi postada uma mensagem sobre um experimento muito interessante para se determinar a massa da Lua usando um pêndulo. A idéia é realmente engenhosa e deve ficar perto do nível V ou VI do Sigma Test, tanto é que num grupo com 35.200 participantes, inclusive vários astrônomos que postam ativamente quando sabem a resposta a um problema ou pergunta, nenhum deles se manifestou nesse caso. É o tipo de problema que cairia bem nas Olimpíadas de Astronomia, em lugar das perguntas tipicamente banais de decorebada, que costumam ocorrer nestes exames, porque o problema de medir a massa da Lua requer uma boa compreensão de alguns conceitos, um pouco de criatividade e envolve conhecimentos de vários fenômenos físicos combinados. Talvez a questão fosse até mais apropriada numa Olimpíada da Física. É realmente uma questão agradável, porém da maneira como foi exposto, parece que o professor não tem uma idéia clara do que ele estava fazendo e suponho que copiou de algum lugar, pois se ele mesmo tivesse formulado, provavelmente saberia resolver pelo menos cerca de 30% de maneira adequada. Antes de prosseguir, seguem a questão e algumas mensagens postadas em seguida (os nomes ou nicks foram trocados por Axxx, Bxxx, etc., sendo "A" a inicial do nome, para não confundir as postagens de diferentes pessoas):

-----

Axxx

*Experiencia para medir a massa da Lua...*

*Experiencia para medir a massa da Lua em relação a massa da Terra.*

*Meu professor de fisica fez uma experiencia mais ou menos assim:*

*Ele amarrou um limão num barbante de 1 m e fez um pêndulo com isso.*

*Ele balançou o limão e pediu para nós medirmos o tempo que ele leva para fazer dez oscilações completas (75 segundos).*

*Depois ele jogou esse tempo em dus fórmulas:  $F = GMm/R^2$  e  $T = 2\pi(\text{raiz } L/g)$*

*M = Massa da Terra.*

*m = Massa do Limão.*

*R = Raio da Terra.*

*Ele fez umas contas com isso e achou que a massa da Terra e 81 vezes maior que a massa da Lua.*

*Agora minha pergunta: Como ele fez isso ? Como usando um limão você mede a massa da Lua ?*

*Ele disse que era pra gente responder pra ele amanhã "Como é possível medir a relação entre a massa da Terra e da Lua através do balanço do limão?"*

-----  
Kxxx

*Amanha a tarde a gente responde, ta bom?*

-----  
Axxx

*Mas eu tenho que pesquisar. Não tá valendo nota.*

-----  
Lxxx

*com certeza era um limao lunar cara!*

-----  
Vxxx

*Semelhanças de circunferências rsrs*

-----  
Fxxx

*Se for lima da pérsia os cálculos ficam tremendamente facilitados.*

-----  
Rxxx

*É só fazer a mesma experiência na Lua. O período de oscilação na Lua será diferente. Considerando que Lua e Terra tem a mesma densidade, você descobre a relação entre as duas massas.*

*Considerando que as densidades são diferentes, você tem que conhecer de antemão o raio da Terra e da Lua.*

*Eu acho que o Prof. sacaneou, já que deixou a entender que só com a experiência do limao na Terra dava para descobrir a relação das massas Terra/Lua.*

-----  
Muito bem. É necessário ter várias outras informações que não foram citadas, sem as quais não é possível atingir a precisão de pelo menos 99,99% no experimento, e sem tal precisão não há como chegar na proporção 81:1 (exceto se chegar a esse resultado por sorte). A pergunta deveria ser: *“qual a proporção entre a massa da Lua e da Terra com base nos resultados do experimento?”* e assim cada aluno ou cada grupo de alunos encontraria um valor diferente, e quem chegasse mais perto do correto receberia maior nota, DESDE que ficasse claro que não chegou mais perto por mera sorte, mas sim por considerar mais detalhes importantes e adotar melhor metodologia na resolução. Uma das partes mais difíceis é fazer o

experimento adequadamente. Com base no que foi descrito, o experimento foi feito “nas coxas”, e assim seria quase impossível obter a proporção 81:1. Mesmo para encontrar ~80:1 seria necessário tomar vários cuidados que aparentemente foram negligenciados.

Para começar, é necessário saber latitude e altitude do local, pressão atmosférica e temperatura no local, altura do pêndulo em relação ao solo (caso esta não seja bem pequena, de poucos metros no máximo). É necessário saber a amplitude de cada oscilação do pêndulo ou, no mínimo, a amplitude média de todas as oscilações, se estas forem todas bem pequenas, algo como 5 graus ou menos. Para tanto seria recomendável filmar, inclusive para ter mais precisão na medida do tempo e ter um registro de todos os ângulos a cada oscilação. É necessário saber a massa do fio ou da haste em que está preso o peso que fica na extremidade, bem como a massa deste peso, para que se possa determinar o baricentro desta estrutura. É necessário conhecer o diâmetro do fio e as medidas do objeto colocado como peso na extremidade, para saber sua densidade. É necessário supor que o fio permanece esticado (quando na verdade ele assume a forma aproximada de um segmento de hipérbole, quase de uma parábola), que tem densidade linear uniforme, que o peso é homogêneo e de superfície lisa ou com boa aerodinâmica, que o fio é inextensível, que o peso da extremidade é sólido. Uma bola com leite e pó de chocolate dentro, por exemplo, teria momento de inércia diferente de uma bola sólida, o que torna ruim a idéia de usar um limão; seria preferível uma esfera de chumbo ou algo assim.

Munido com estas informações, usa-se a latitude e a altitude (e altura no local) para calcular a aceleração gravitacional no local, bem como a aceleração centrífuga no local. A pressão atmosférica e a temperatura se usam para calcular a viscosidade do ar. A fórmula citada  $T = 2\pi \sqrt{L/g}$  não procede, só se aplica grosseiramente para pequenas amplitudes, no vácuo, se o comprimento for medido até o baricentro do pêndulo, se for indeformável etc. A fórmula para qualquer amplitude de oscilação é  $T \sim 2\pi \sqrt{L/g}^{0,5} * (1 + \theta^2/16 + 11*\theta^4/3072 + \dots)$ , que também não é totalmente correta, porque quando o pêndulo está no ponto mais baixo ele está sujeito a uma aceleração mais intensa do que quando está mais alto, e esta fórmula supõe que o campo seja o mesmo qualquer que seja a posição, além disso o empuxo e a viscosidade do ar também variam entre a parte mais baixa e mais alta do pêndulo. São variações imensuravelmente pequenas, porém não são levadas em conta na fórmula, o que a torna incompleta. A fórmula  $F = GMm/R^2$  também não se aplica, aliás, é justamente por meio desta fórmula  $F = G(M+m)m/R^2$  que se consegue obter o resultado, já que no caso da Lua  $M+m$  é cerca de 1,23% maior do que  $M+m$  no caso do limão.

Com estas informações, alguns milhares de medidas bem conduzidas poderiam proporcionar uma boa idéia da aceleração gravitacional local. A partir daí, seria possível saber a massa da Terra. Conhecendo o período orbital da Lua e a distância da Lua (ou calculando), se poderia saber a massa do sistema Terra + Lua, e então obter a proporção em relação à massa da Terra + limão. Para conseguir chegar ao valor de 81:1, como citado no enunciado, a medida do período do pêndulo precisaria ter 99,99% de acurácia. Uma medida como 75 segundos (apenas 2 algarismos significativos), com base em apenas 10 oscilações, e uma medida feita nas coxas do comprimento do pêndulo, jamais possibilitariam sequer obter a ordem de grandeza correta, e com sorte se chegaria em algo entre 30:1 e 300:1 para proporção entre as massas da Terra e da Lua, com muita sorte se chegaria em 100:1. Pois o valor 81:1 depende das 4 últimas decimais de 1,0123 que representa a proporção da massa Terra + Lua em comparação à massa Terra + limão (ou Terra sozinha). Se houvesse um erro na quarta decimal, algo como 1,0122, então o resultado já seria 82:1. O experimento descrito jamais serviria para conduzir ao resultado citado, exceto se vários erros combinados, por sorte, se compensaram mutuamente de diversas maneiras para que o resultado final fosse correto.

Na época de Newton, em que se fazia experimentos muito, mas MUITO mais meticolosos do que o descrito acima, se pensava que a proporção fosse de 67:1.

Uma das utilidades de se conhecer a massa do limão (na verdade, sua densidade média) seria para calcular o empuxo e os efeitos da viscosidade do ar, mas tudo leva a crer que a informação sobre a massa do limão não foi usada desta maneira. Além disso, o efeito do ar sobre o pêndulo é principalmente o de reduzir progressivamente a amplitude da oscilação, que vai diminuindo porque o ar vai freando o movimento, logo a observação do ângulo seria suficiente para medir este efeito com nível de acurácia necessário, sem necessidade de conhecer a massa do limão para isso (o erro de não considerar a densidade do limão seria cerca de 1 parte em 30.000). Outra utilidade de conhecer a massa do limão e a massa do fio seria para determinar o comprimento correto do pêndulo, desde o baricentro do sistema até o vértice do movimento, mas como não há menção à massa do fio, provavelmente também não é aí que a informação foi usada. Na verdade, a rigor, a medida do baricentro do sistema não seria o método mais correto. O ideal seria uma integral para a força exercida em cada parte do pêndulo, que varia com a distribuição da massa ao longo do fio e, em menor proporção, com a altura (distância ao centro da Terra), que causa uma variação em nível picométrico, que não seria mensurável, mas, a rigor, existiria. Também o empuxo é maior na parte mais baixa, numa proporção ínfima e sujeita a turbulências, mas, em média, também seria um efeito. Em última instância, o cálculo também poderia levar em conta relatividade geral e restrita, mas só a solução clássica já daria bastante pano pra manga.

Para o nível de precisão citado no experimento e para se chegar ao resultado 81:1, seria apropriado levar em conta pelo menos os seguintes fatores:

Massa do limão e incerteza nesta massa

Massa do fio e incerteza nesta massa

Comprimento no pêndulo e incerteza neste comprimento

Período médio das oscilações, tendo em conta um balanceamento que considere a amplitude de cada oscilação (preferencialmente o experimento deveria ser filmado e depois se deveria medir o tempo no vídeo, com mais precisão)

Deixar claro que a medida foi feita desde o baricentro do sistema até o vértice

Descrever quais cuidados foram tomados para garantir que o vértice permanecesse tão fixo quanto possível

Amplitude de cada oscilação (o erro de não usar isso é muito grande, muito maior que os 0,01% que seria o máximo aceitável para chegar a algo em torno de 81:1)

Latitude do local

Altitude do local

Além disso seria preciso conhecer (ou calcular) distância da Lua e período sideral da Lua.

Os efeitos de empuxo e viscosidade estariam quase integralmente implícitos na progressiva redução na amplitude. A deformação no fio, tanto no que diz respeito a não ser uma linha reta, mas sim um segmento de hipérbole, quanto no comprimento, que muda ligeiramente quando está no ponto mais baixo (maior velocidade, maior força centrífuga, maior deformação por alongamento), não seriam suficientemente expressivos para afetar o resultado do experimento dentro do nível de precisão que foi citado.

Desse modo, com milhares de medidas com precisão de 0,04 segundo nas oscilações (filmagem em 24 ou 25 ou 30 frames por segundo), se poderia ter um período de, digamos, 0,74573 segundo e desvio-padrão na média de 0,00005, isto é, com 68% de probabilidade de o período do pêndulo estar situado entre 0,74568 s e 0,74578 s, e uma precisão de 99,987%, perto da necessária para se conseguir chegar em algo como 81:1, com incerteza de 0,5 para mais ou para menos, na proporção entre massa da Terra e massa da Lua.

[update 2/4/2009]

O caso é muito pior do que eu imaginava. A atividade foi proposta pela própria OBA, com uma resolução alarmantemente superficial e que não atende ao enunciado. Eles começam com uma proposta de calcular a massa da Lua, mas não calculam! Embora fosse possível, conforme descrito acima. Segue link da OBA:

[http://www.oba.org.br/sisglob/sisglob\\_arquivos/pasta\\_downloads/2009/atv\\_%20praticas/Atividade%20Pratica%20de%202009%20\\_1.pdf](http://www.oba.org.br/sisglob/sisglob_arquivos/pasta_downloads/2009/atv_%20praticas/Atividade%20Pratica%20de%202009%20_1.pdf)